

航空发动机中的干摩擦阻尼器及其设计技术研究进展

李 琳^{1,2}, 刘久周^{1,2}, 李 超^{1,2}

(1. 北京航空航天大学 能源与动力工程学院, 北京 100191;
2. 先进航空发动机协同创新中心, 北京 100191)

摘 要: 总结了航空发动机中的典型干摩擦阻尼器的结构形式及其工作原理,并给出了干摩擦模型以及接触运动模型的简化方法以及不同简化模型的优缺点和适用范围. 分析了干摩擦阻尼系统响应分析的各种方法的特点,重点论述了近年来发展较为迅速的基于时频转换算法的高阶谐波平衡法的基本思想,并介绍了在进行时频转换分析过程中的弧长延拓法等关键技术. 最后,论述了航空发动机中干摩擦阻尼器的设计和未来发展所面临的困难和未来的发展方向.

关 键 词: 干摩擦阻尼器; 干摩擦模型; 接触运动模型; 高阶谐波平衡法; 时频转换算法

中图分类号: V231

文献标志码: A

Review of the dry friction dampers in aero-engine and their design technologies

LI Lin^{1,2}, LIU Jiu-zhou^{1,2}, LI Chao^{1,2}

(1. School of Energy and Power Engineering,
Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100191, China;
2. Collaborative Innovation Center for Advanced Aero-Engine, Beijing 100191, China)

Abstract: Various typical dry friction dampers in aero-engine were summarized, and different typical dry friction models and contact kinematics models as well as their merit, demerit and range of application were introduced. Various computational methods to obtain the response of dry friction system were reviewed, and the multi-harmonic balance method combined with an alternating frequency-time domain method procedure was introduced in detail for particular interest. Furthermore, the key points of alternating frequency-time domain procedure, such as the arc-length continuation, were introduced. In the end, the difficulties and research directions in this research field were discussed.

Key words: dry friction damper; dry friction model; contact kinematics model; multi-harmonic balance method; alternating frequency-time domain method

航空发动机是典型的高速旋转机械,其核心部件工作环境十分恶劣,特别是压气机及涡轮工作叶片承受着上游高温高压气流施加的复杂循环载荷,在轻质高强度的设计要求下极易发生高频共振和由振动引起的高周循环疲劳破坏,这使得

减振、抑振成为航空发动机结构部件设计的一项重要内容. 干摩擦阻尼器具有结构简单、减振效果明显、经济性好的特点,特别是对温度变化不敏感的优势使其在航空发动机结构部件的减振设计中得到了研究与设计人员的青睐.

收稿日期:2015-01-31

作者简介:李琳(1956—),女,河北唐山人,教授、博士生导师,博士,主要从事航空发动机叶盘结构振动、流固耦合动力学分析等研究. E-mail:feililin@buaa.edu.cn

自从 Hartog^[1] 率先开展对干摩擦问题的研究,数十年来研究人员对各种类型的干摩擦阻尼问题展开了大量的研究,旨在掌握干摩擦阻尼的作用规律,并据此设计出简单高效的干摩擦阻尼器。已有的研究表明,摩擦运动过程中存在着滑动、黏滞、黏-滑、甚至分离等多种状态,干摩擦阻尼系统在数学上具有强非线性特点,这使得干摩擦阻尼系统的计算分析以及利用其对结构系统进行减振的设计充满了挑战。

有关航空发动机中干摩擦阻尼的减振设置及其设计理论、方法与技术的研究进展,国际国内有几篇综述性文献值得关注:Griffin^[2] 对 1989 年以前的航空发动机的叶片阻尼器的模型简化方法、非线性系统计算分析方法以及阻尼器结构参数的优化方法进行了综述。2001 年,单颖春等^[3] 对干摩擦阻尼块(主要是缘板阻尼器)在叶片减振方面的应用与发展进行了综述,从干摩擦阻尼块的结构模型简化、非线性分析方法、阻尼块优化设计等几个方面介绍了干摩擦阻尼块的设计研究的发展情况。同年,白鸿柏等^[4] 则从计算方法方面对干摩擦振动系统的响应计算进行了综述,论述了干摩擦系统在简谐、随机和冲击激励下的响应计算方法,并对各种计算方法的特点进行了评述。Castanier 等^[5] 在 2006 年对失谐叶盘结构的研究进展和研究方向进行评述时指出需要对考虑干摩擦阻尼等非线性因素的(失谐)叶盘结构振动特性进行更深入的研究。

近十年来,得益于计算机软硬件的进步,航空发动机中具有干摩擦设置的结构动态特性分析方法与设计技术也取得了较大进步,值得对其进行总结和分析。本文结合作者在相关领域所做的研究以及近年来国内外已发表的经典文献,对航空发动机中的干摩擦阻尼器及其设计技术的研究现状进行综述,主要涉及航空发动机中常见的干摩擦阻尼器的结构形式;对各种类型干摩擦阻尼器进行分析计算和优化设计常用的分析模型;干摩擦阻尼器分析设计与计算的常用方法;最后对航空发动机中干摩擦阻尼器设计和发展所面临的挑战进行了讨论。

1 航空发动机中干摩擦阻尼器的结构形式

航空发动机的振动环境要求其结构部件的设计具有减振、抑振功能。一般把为增加这些功能而设计的结构装置称为阻尼器。常见的干摩擦阻尼

器有:叶片凸肩、叶冠、拉筋、缘板阻尼器、榫接连接、摩擦套筒以及摩擦环等等。

1.1 针对旋转叶片减振抑振的干摩擦阻尼装置

在叶身上设计的减振装置有凸肩、拉筋等形式。凸肩结构主要用于较长的风扇叶片及压气机前几级叶片,以提高叶片的抗外物打击能力(F100, F110, PW2037 等)^[6-7],典型的凸肩结构如图 1(a)所示。文献[8-12]对凸肩结构的阻尼特性进行了深入的理论分析以及实验研究,分析了凸肩接触面的角度、接触面的预设正压力等参数对振动抑制效果的影响,给出了凸肩结构的设计规律。

大展弦比低压涡轮转子叶片通常在叶片顶端带有叶冠(AL31F, CFM56, PW4000 等),叶冠除了起到提高效率,增加叶片刚度的作用外,当叶片产生振动时,相邻叶冠的接触面间产生摩擦,还可起到吸收振动能量的减振作用。典型叶冠的形状有平行四边形和锯齿形等,如图 1(b)所示为锯齿形叶冠。文献[13-15]对叶冠结构的阻尼特性进行了深入的研究。

为了尽量减小对叶栅气动效率的影响,先进航空发动机转子叶片(如小展弦比的宽弦叶片)的减振设计较多体现在对叶根的设计上(如图 1(c)),叶根的设计很大程度上决定其振动抑制效果。一些航空发动机中采用了“双榫根”的结构(J79, CF6-6 等),将每个叶片的榫头做成常规榫头的一半(图 1(d)),一对叶片合成一个榫头装在一个轮盘榫槽中,工作时两个接合面相互压紧,振动时该面上产生摩擦可以减振。文献[16-23]采用集中参数模型以及高保真有限元模型对榫头阻尼进行了深入的研究,并对分析结果进行了实验验证。

一些航空发动机(JT9D, CF6, PW4000 等)的高压涡轮转子叶片在叶根处装有阻尼块,称为缘板阻尼器(如图 1(e))。当叶片产生振动时,缘板阻尼器与其接触的叶根产生摩擦达到减振的目的。典型的缘板阻尼器有楔形缘板阻尼器、线状缘板阻尼器以及带状缘板阻尼器等,文献[24-29]对不同类型的缘板阻尼器及其简化模型进行了研究,给出了缘板阻尼器的设计参数对减振效果的影响规律。

1.2 针对整体叶盘减振抑振的干摩擦阻尼装置

得益于制造加工技术的进步,很多先进航空发动机都采用了整体叶盘结构(如 F119, F135, GE90, Trent900 等),即叶片与轮盘一体加工,两者之间不存在需要经过装配的连接,从而大大降低了叶盘结构的质量,提高了叶盘结构的可靠性。

不过从减振抑振的观点来看,没有了原来的榫接阻尼、凸肩阻尼等具有减振抑振功能的结构设置,叶盘结构系统的结构阻尼大大降低,也就是说整体叶盘结构的抑振能力较低。为解决此问题,必须开发新途径,采用新方法,设计新结构,以提高整体叶盘的抑振能力。为此,研究人员设计了新型的阻尼环结构,如在轮盘的凹槽内安装弹性阻尼环结构(图1(f))来增加结构系统的阻尼进而达到减振的目的。文献[30-32]对阻尼环的动力学特性进行了较为系统的研究,给出了阻尼环作用效果的影响因素以及设计准则。一些先进涡轴发动机的离心叶盘结构(如MTR390的第1,2级离心压气机叶盘)为了降低由于振动产生的应力,也常装有减振胀圈(图1(g))^[33]。航空齿轮结构与整体叶盘结构类似,同样存在振动问题,其阻尼环结构与叶盘结构减振阻尼环的形式也相似,文献[34]针对航空锥齿轮减振阻尼环(图1(h))进行了理论分析和数值仿真,探索了阻尼环设计方法。类似的装置还

有应用于多级整体叶盘/叶环的级间波纹胀圈式干摩擦阻尼环,用于涡轮叶盘的叶片轮缘阻尼带等。

1.3 针对薄壁旋转构件减振抑振的干摩擦阻尼装置

除了叶片和轮盘等结构外,航空发动机中的许多薄壁旋转构件(如篦齿封严装置等)也存在着严重的振动问题。因此,航空发动机的封严组件中常配有阻尼套筒、阻尼环等装置来增加转子系统的结构阻尼(图1(i),图1(j))。一般可在篦齿封严结构后面加装弹性开口阻尼环、指状干摩擦阻尼结构、T型开口阻尼环等,在振动过程中产生干摩擦阻尼,以抑制振动。文献[35-38]运用弹性力学和接触力学的有关理论研究了用于篦齿封严装置减振的阻尼环结构,给出了封严环/阻尼环组合结构动力特性的分析方法,研究了阻尼片厚度、阻尼片周向分布数量、装配过盈量等参数对结构动力特性的影响规律,并进行了实验验证。

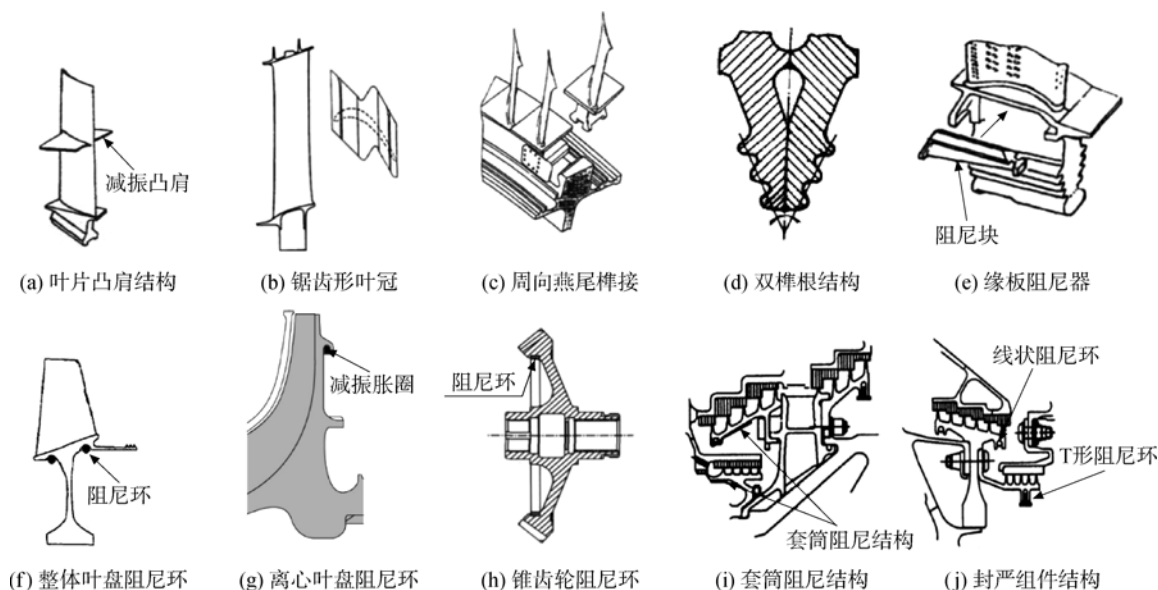


图1 航空发动机中的典型干摩擦阻尼器结构

Fig. 1 Typical dry friction dampers in aero-engine

2 航空发动机中干摩擦阻尼器的分析模型

上述各式干摩擦阻尼器尽管工作机理相似,都是基于干摩擦耗能减振,但是不同结构形式的阻尼器的工作方式各不相同,在计算分析和设计时需要有针对性的进行建模分析和设计。

2.1 干摩擦阻尼器的摩擦模型

早期的研究中,阻尼器被假设为刚性的,即接

触面上的接触点之间不是保持滑移状态就是保持黏滞状态,但是这种摩擦模型假设与实际情况存在着较大的误差。Goodman等^[39]率先考虑了接触面的刚度,此后的研究中所用的摩擦模型大多都考虑了接触面的刚度,接触刚度一般需要通过实验来获得。考虑接触刚度的最简单的摩擦模型就是迟滞弹簧模型,它是一种宏观滑移模型,通过将几个迟滞弹簧模型进行并联,就成了微动滑移模型。

宏观滑移模型是一种单点接触模型,它假设接触面上的变形以及正压力是均匀的,面内所有的接触点同时滑动或黏滞,所有接触点的运动状况可以通过一个点描述.这种模型简单,计算量小,当接触面的面积较小或者接触面的法向正压力较小时,该模型得到了较好的应用,且分析结果与实验结果吻合较好,文献[40-41]利用宏观滑移模型对 B-G(blade to ground)型叶片缘板阻尼器进行了分析.

微动滑移模型能更准确预测阻尼器的振动抑制效果^[42],此时沿接触面上分布的力学参数将不再均匀,需要采用多个接触点来描述接触面特性.与宏观滑移模型相比,当接触面的正压力较大时,微动滑移模型能够考虑接触面上只有部分接触点发生滑移,而其他接触点保持黏滞状态的情况.自然,该模型在数值计算和分析方面更为复杂.文献[43-45]采用微动滑移模型对简化的叶片干摩擦阻尼系统进行分析.文献[46]基于该模型对缘板阻尼器的减振特性进行了研究.文献[47]基于该模型对叶片凸肩及叶冠阻尼系统进行了分析.

2.2 干摩擦阻尼器的接触运动学模型

在对干摩擦阻尼系统进行分析时,首先要建立阻尼元件与振动元件之间的相互运动关系模型,而不同接触运动模型将导致摩擦力与接触点位移间具有不同的函数关系,直接影响计算结果.在至今为止的相关研究中,如图2~图5所示的4种接触运动模型最为常用^[48],分别为一维恒正压力模型、一维变正压力模型、二维恒正压力模型和二维变正压力模型.将这4种接触运动模型引入到宏观滑移模型或者微动滑移模型中,再结合不同阻尼器的结构特点便几乎可以对任意复杂程度的干摩擦阻尼器模型进行计算分析.

2.2.1 一维恒正压力模型

一维恒正压力接触运动模型由 Griffin^[40]提出,他利用该模型对航空发动机的涡轮叶片阻尼器进行了研究.该模型(如图2)假设接触点的运动轨迹是一维的,且接触面上的正压力为常数.对于接触面的面积较小,且正压力较小时,该模型获得了广泛的应用,关于以一维恒正压力模型为基础的宏观或微动滑移模型的研究已经较为深入.文献[40-41]采用一维恒正压力模型对叶片缘板阻尼器的稳态响应进行了计算分析,并与实验结果进行了对比.文献[49]采用该模型对叶片凸肩阻尼进行了分析,并对考虑凸肩阻尼的失谐叶

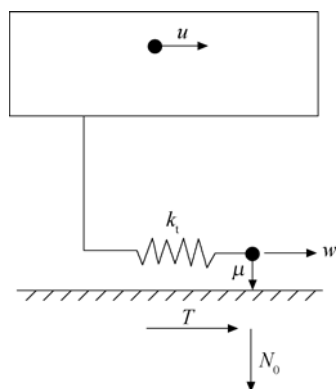


图2 一维恒正压力模型

Fig. 2 1-D relative displacements and constant normal load contact model

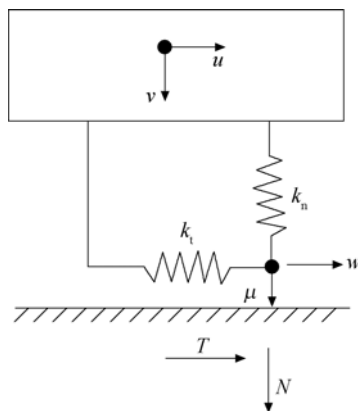


图3 一维变正压力模型

Fig. 3 1-D relative displacements and variable normal load contact model

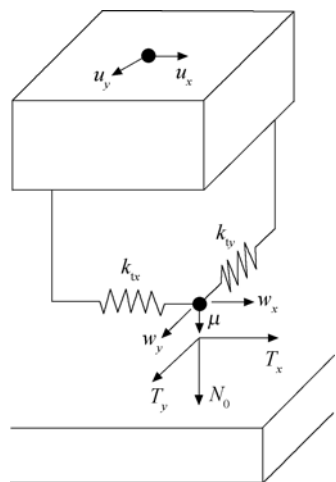


图4 二维恒正压力模型

Fig. 4 2-D relative displacements and constant normal load contact model

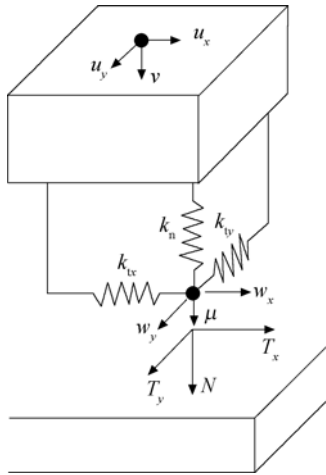


图 5 二维变正压力模型

Fig. 5 2-D relative displacements and variable normal load contact model

盘结构进行了分析. 该模型的摩擦力迟滞曲线如图 6 所示. 一维恒正压力模型的不足之处是不能描述接触面法向运动对接触状态的影响, 也无法描述接触面的耦合振动(如叶片结构的弯扭耦合振动等).

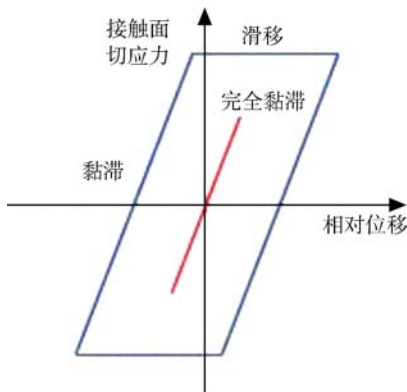


图 6 一维恒正压力模型的迟滞曲线

Fig. 6 Typical hysteresis cycles of 1-D relative displacements and constant normal load contact model

2.2.2 一维变正压力模型

当接触面切向方向与振动方向不一致时, 则接触面的正压力是可变的, 此时一维恒正压力模型不能描述接触面的法向相对运动引起的正压力变化对干摩擦阻尼系统产生的影响, 因此在一维恒正压力模型的基础上, 引入接触面的法向刚度 k_n , 并引入初始正压力值 $N(t)$ (如果初始正压力为负值表示接触面之间存在初始间隙), 提出了一维变正压力模型(图 3). 文献[13]采用可变正压力模型对单自由度非线性系统进行了分析. 文献

[50-51]利用该模型对叶片凸肩阻尼系统进行了研究. 该模型的迟滞曲线如图 7 所示, 但该模型仍然无法描述接触面的耦合振动.

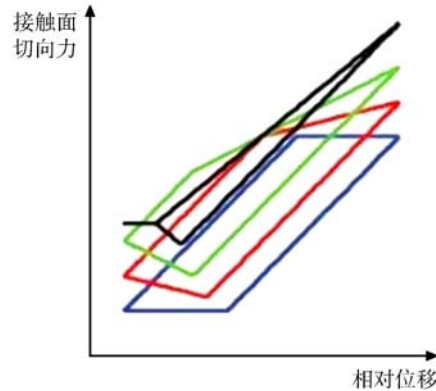


图 7 一维变正压力模型的迟滞曲线

Fig. 7 Typical hysteresis cycles of 1-D relative displacements and variable normal load contact model

2.2.3 二维恒正压力模型

实际中, 接触面会发生耦合振动, 因此接触点的轨迹可能是圆、椭圆甚至是平面上不规则的闭合曲线. 若要描述接触点的这种二维运动的特性, 必须采用二维接触运动模型. 通常, 二维接触运动模型可以通过两个相互正交的一维接触运动模型来模拟, 也可以通过二维接触运动模型进行模拟(图 4), 两者的区别在于利用两个正交的一维接触运动单元进行模拟时不能考虑两个正交方向上的运动相互耦合关系, 而采用二维接触模型可以考虑两个正交方向上运动的耦合关系, 使分析结果与真实情况更加接近, 因此这种二维接触运动模型的应用更加广泛. 文献[52-54]对二维恒正压力模型进行了详细的分析, 其接触面上相互正交的两个方向上的切向力轨迹如图 8 所示, 该模型能够考虑接触面上的耦合振动, 但不能描述接触面法向运动对接触状态的影响.

2.2.4 二维变正压力模型

二维变正压力模型也可称为三维接触运动模型, 可适用于楔形缘板阻尼器等接触点的滑动方向与叶片振动方向具有一定夹角的情况. 接触点的滑动将导致作用在两接触面上的正压力发生变化, 正压力的变化又进一步使摩擦力发生变化, 使接触面内的切向运动与接触面的法向运动之间相互耦合, 在正压力可变时, 接触面上相互正交的两个方向上的切向力轨迹如图 9 所示^[48]. 文献[55-56]采用这种模型对简化的单自由度干摩擦

阻尼系统进行了分析. 在对高保真有限元模型进行研究时, 该模型得到了广泛的应用, Petrov等^[13-15]采用这种运动模型对带冠涡轮叶片及叶盘系统进行了系统的分析, 给出了其在不同接触状态下转换的判定准则.

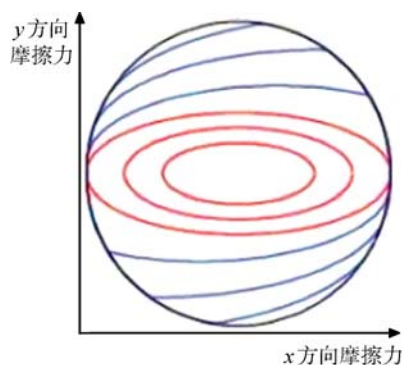


图8 二维恒正压力模型接触面切向力轨迹
Fig. 8 Tangential force trajectories on contact surface of 2-D relative displacements and constant normal load contact model

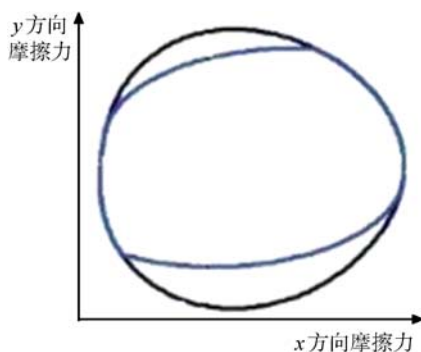


图9 二维变正压力模型接触面切向力轨迹^[48]
Fig. 9 Tangential force trajectories on contact surface of 2-D relative displacements and variable normal load contact model^[48]

3 干摩擦阻尼器的设计与计算方法

航空发动机中干摩擦阻尼器的设计目的是使相关的结构部件(一般为转动部件)在航空发动机工作转速范围内具有较低的振动幅值, 特别是在航空发动机起动或停车过程经过部件共振频率时, 干摩擦阻尼器需能发挥最大的减振效果. 因此, 在设计时需要包括干摩擦阻尼器的结构部件进行动力学特性分析与计算.

具有干摩擦阻尼的系统动力学方程一般为非线性微分方程, 如何对其高效求解是干摩擦阻尼系统研究的一个重要方面.

3.1 时域中的计算与分析方法

在时域中的计算与分析一般是采用数值积分法(numerical integration method, NTM)对振动微分方程在时域内直接求解. 该方法在每一个时间步, 对摩擦力进行更新, 通过这种方法可将振动方程转化为一组相互耦合的线性方程组, 然后通过一步一步的迭代求得最后的结果. 时域法的优点在于可以跟踪系统响应的时间历程, 能够准确反映摩擦面黏滞状态与滑动状态之间的转换, 只要时间步长选择得合适, 总可以保证计算结果达到较高的精度, 且对所涉及问题的非线性程度限制少.

该方法的主要缺点是需要大量的计算时间, 从瞬态振动过渡到稳态振动往往需要上百个振动周期. 在状态转换点附近需要采用较小的时间步长, 以保证计算的精度. 这样采用尽量小的时间步长同时需要较多的计算周期导致了直接积分法的计算效率很低. 若采用有限元建模, 运动方程规模较大, 且在对阻尼块进行优化设计时往往需要对多个参数进行逐一修改、试算, 用数值积分法所需的计算时间远远不能满足这一要求, 因此该方法常用于检验其他方法的准确性. 常用的数值积分法包括 Newmark 法、Runge-kutta 法等, 文献^[57]采用直接积分法对缘板阻尼器系统进行了详细的分析, 给出了接触面状态转换的判定准则. 文献^[58-59]给出了二自由度扭转干摩擦阻尼系统的直接积分法的基本过程.

3.2 频域中的计算与分析方法

频域中的计算与分析方法主要是指谐波平衡法(harmonic balance method, HBM)及其拓展. 谐波平衡法假设当叶片受到简谐激励时, 叶片的振动位移及接触面间的摩擦力均呈周期变化且周期与激励力的周期相同, 则振动位移与摩擦力可以精确展开成傅里叶级数的形式. 进一步假设叶片振动主要表现为基频振动时, 可只保留摩擦力级数展开式的一次项, 从而使非线性微分方程的求解转化为非线性代数方程的求解. 这是一种求解强非线性问题的快速有效的方法, 广泛应用于阻尼块的优化设计中. 谐波平衡法除了在单自由度干摩擦阻尼系统中得到了较好的应用^[60-61], 还被用到了多自由度集中质量模型中^[62-63]以及有限元模型中^[24-25, 64].

当非线性摩擦力中的高阶谐波对振动影响较大时, 一次谐波平衡法的计算结果将产生较大的

误差.为此有文献提出了考虑高阶谐波影响的增量谐波平衡法^[65-67],但是该方法在计算效率上比直接积分法并无显著优势.也有文献考虑了高阶谐波平衡方法^[68],保留 3 阶谐波阶次的结果与数值积分法的结算结果十分接近,而所用的计算时间还不到数值积分法的 1/10.这种方法一般只适用于一维接触模型摩擦力的线性化,且当保留的谐波阶次较高时,很难获得非线性代数方程组的解析形式.

3.3 时域/频域交互算法及其拓展

由前述可知,无论是时域的数值积分法还是频域的谐波平衡法,虽然都有各自显著的优势,但也都存在明显的不足,这使得对复杂的干摩擦阻尼系统的分析计算一度停滞不前.直到 Cameron 和 Griffin^[69]提出了在时域和频域中对干摩擦阻尼系统进行交互分析的思想,复杂的干摩擦阻尼系统的分析计算才取得了突破性的进展;他们将这种方法命名为时频转换算法(alternating frequency time method, AFT).时频转换算法综合了时域分析和频域分析各自的优点,充分利用了在频域中求解线性系统避免卷积运算的高效性和时域中计算非线性力的便利性,通过快速傅里叶变换(FFT)将非线性力的时域函数转化成频域函数,求解动力系统的稳态响应,再对振动响应作快速傅里叶逆变换(IFT)得到其在时域中的解,进而得到非线性力的时域函数,通过反复迭代最终得到动力系统的稳态解.时域/频域交互算法的基本流程如图 10 所示.

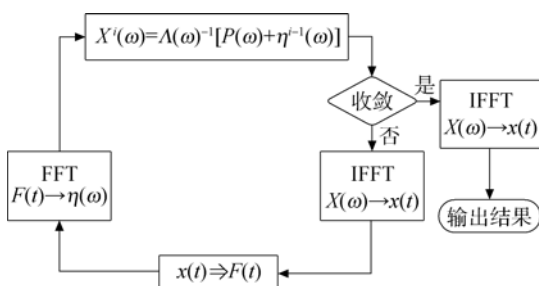


图 10 时频转换算法的基本流程^[69]

Fig. 10 Flow chart of the alternating frequency-time domain method^[69]

时频转换算法特别在结合有限元方法对工程中的复杂干摩擦阻尼系统振动响应问题进行分析时展现了强大威力.该方法的不足是存在着频率的泄露和混叠等问题^[69],在应用时需要注意.后续的研究人员对该方法做了较大的改进,李

琳^[70-71]利用时频转换的思想对带冠叶盘系统进行了分析,并提出了处理泄露及叠混误差的方法.史亚杰等^[9-11],陈璐璐等^[19-21]将时频转换的思想与轨迹跟踪法、动柔度法相结合,实现了对叶片凸肩阻尼以及榫接连接问题的分析.刘雅琳等^[72]利用时频转换算法对简化的榫接连接模型进行了研究.Guillen^[73]则对时频转换算法进行了系统的改进,提出了基于时频转换算法的高阶谐波平衡法,并利用此方法对复杂的干摩擦阻尼系统的集中参数模型进行了大量的研究.Poudou 等^[74-75]对 Guillen 的方法进行了发展,采用二维接触运动模型对燃气轮机的叶片缘板阻尼器进行了分析,并在此基础上对航空发动机的失谐叶盘结构集中参数模型进行了分析.Petrov 等^[15]则在此基础上给出了接触面上多谐波非线性力及其雅克比矩阵的解析表达形式,提高了高阶谐波平衡法的求解速度、求解精度以及数值稳定性.Laxalde 等^[30-32]利用基于时频转换算法的高阶谐波平衡法对考虑干摩擦阻尼的谐调及失谐叶盘结构集中参数模型进行了定性分析,给出了阻尼环的相关参数对振动抑制效果的影响,并指出了叶片和轮盘之间耦合强弱对阻尼环振动抑制效果的影响.在高阶谐波平衡法的基础上,提出了动态拉格朗日法^[76-78],并对叶盘结构高保真有限元模型进行了分析.文献^[79-81]采用这一方法对涡轮的叶冠接触问题进行了分析,并对该方法的计算效率、数值迭代稳定性等方面进行了细致的研究.时频转换算法及基于其的扩展算法已经成为目前国际上进行干摩擦阻尼系统响应计算的主流分析方法.鉴于该方法可对几乎任意复杂的干摩擦问题进行分析,下面对该方法应用中的几个技术问题进行概述.

3.3.1 高阶谐波平衡法

一般考虑干摩擦阻尼作用的非线性系统的动力学方程可以表示为

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{x}(t) = \mathbf{f}_{\text{ext}}(t) + \mathbf{f}_{\text{nl}}(t, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) \quad (1)$$

其中 $\mathbf{M}, \mathbf{K}, \mathbf{C}$ 分别为非线性系统的质量矩阵、刚度矩阵以及阻尼矩阵; $\mathbf{x}(t)$ 为系统的广义位移向量; $\mathbf{f}_{\text{ext}}(t)$ 为系统所受的激振力向量; $\mathbf{f}_{\text{nl}}(t, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})$ 为由于摩擦阻尼器提供的摩擦力向量.根据干摩擦阻尼的特点,系统中的摩擦力不仅是时间的函数,同时也是接触点位移以及运动速度的函数,因此方程组(1)为 2 阶非线性微分方程组.

用谐波平衡法求解时,先将方程中与时间相关的各项展开为傅里叶级数的形式

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{X}^0 + \sum_{n=1}^{N_h} [\mathbf{X}^{n,c} \cos(n\omega t) + \mathbf{X}^{n,s} \sin(n\omega t)] \quad (2)$$

$$\mathbf{f}_{\text{ext}}(t) = \mathbf{F}_{\text{ext}}^0 + \sum_{n=1}^{N_h} [\mathbf{F}_{\text{ext}}^{n,c} \cos(n\omega t) + \mathbf{F}_{\text{ext}}^{n,s} \sin(n\omega t)] \quad (3)$$

$$\mathbf{f}_{\text{nl}}(t) = \mathbf{F}_{\text{nl}}^0 + \sum_{n=1}^{N_h} [\mathbf{F}_{\text{nl}}^{n,c} \cos(n\omega t) + \mathbf{F}_{\text{nl}}^{n,s} \sin(n\omega t)] \quad (4)$$

其中 N_h 为保留的最高谐波阶次, ω 为激励频率. 将式(2)~式(4)中各项的傅里叶系数写成向量的形式

$$\mathbf{X} = [\mathbf{X}^0, \mathbf{X}^{1,c}, \mathbf{X}^{1,s}, \dots, \mathbf{X}^{N_h,s}]^T \quad (5)$$

$$\mathbf{F}_{\text{ext}} = [\mathbf{F}_{\text{ext}}^0, \mathbf{F}_{\text{ext}}^{1,c}, \mathbf{F}_{\text{ext}}^{1,s}, \dots, \mathbf{F}_{\text{ext}}^{N_h,s}]^T \quad (6)$$

$$\mathbf{F}_{\text{nl}} = [\mathbf{F}_{\text{nl}}^0, \mathbf{F}_{\text{nl}}^{1,c}, \mathbf{F}_{\text{nl}}^{1,s}, \dots, \mathbf{F}_{\text{nl}}^{N_h,s}]^T \quad (7)$$

将式(2)~式(4)代入方程(1)中,并利用谐波平衡的思想可得系统的频域方程为

$$\mathbf{H}\mathbf{X} = \mathbf{F}_{\text{ext}} + \mathbf{F}_{\text{nl}} \quad (8)$$

其中

$$\mathbf{H} = \text{diag}(\mathbf{K}, \mathbf{H}_1, \dots, \mathbf{H}_{N_h}) \quad (9)$$

$$\mathbf{H}_k = \begin{bmatrix} -(k\omega)^2 \mathbf{M} + \mathbf{K} & k\omega \mathbf{C} \\ -k\omega \mathbf{C} & -(k\omega)^2 \mathbf{M} + \mathbf{K} \end{bmatrix} \quad k = 1, 2, \dots, N_h \quad (10)$$

一般来说,由于在频域上 $\mathbf{F}_{\text{nl}}$ 是 $\mathbf{X}$ 的函数,所以方程(8)是以 $\mathbf{X}$ 为未知量的非线性代数方程组,即谐波平衡法把时域中的非线性微分方程组(8)转化成了频域中的非线性代数方程组(8),其迭代收敛解即为系统在相应激励频率下的响应幅值.

在对非线性方程组(8)进行迭代求解时,一般将其写为式(11)的形式

$$\mathbf{F}(\omega, \mathbf{X}) = \mathbf{H}(\omega)\mathbf{X} - \mathbf{F}_{\text{ext}} - \mathbf{F}_{\text{nl}}(\mathbf{X}) \quad (11)$$

其中 $\mathbf{F}(\omega, \mathbf{X})$ 为解的收敛判定残差.

对非线性方程组进行迭代求解常用牛顿-拉夫逊迭代法. 牛顿-拉夫逊法的迭代公式为

$$\mathbf{X}_{n+1} = \mathbf{X}_n - \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{X}_n) \mathbf{F}(\mathbf{X}_n) \quad (12)$$

其中 $\mathbf{J}(\mathbf{X}_n)$ 为第 n 次迭代对应的方程组(11)的雅可比矩阵,其表达式为

$$\mathbf{J}(\mathbf{X}_n) = \left. \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{X}} \right|_{\mathbf{X}_n} \quad (13)$$

3.3.2 摩擦力迭代

显然,要获得频域中关于 $\mathbf{X}$ 的非线性代数方程组(8),需要给出摩擦力在频域中的表达式 $\mathbf{F}_{\text{nl}}$, 然而当保留的谐波阶次 $N_h \geq 2$ 时,这个表达式就很难写出了. 根据 Griffin 等提出的时频转换算法,可先在时域中对摩擦力进行求解(即先假设一个系统的位移 $\mathbf{x}(t)$, 计算出对应的 $\mathbf{f}_{\text{nl}}(t, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})$, 然后利用傅里叶变换转化到频域中,带入式(8); 此时方程组(8)成为一个线性代数方程组,对其求解得到 $\mathbf{X}$; 再对 $\mathbf{X}$ 做逆傅里叶变换,获得一个新的 $\mathbf{x}(t)$; 如此迭代下去,即可得到一个收敛的解 $\mathbf{X}$, 迭代过程如图 11 所示.

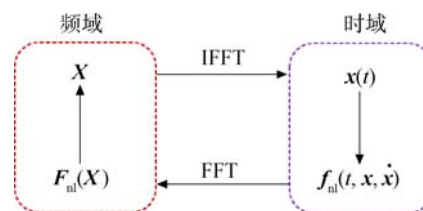


图 11 摩擦力迭代过程

Fig. 11 Iteration procedure of friction force

3.3.3 延拓技术

当不考虑接触面的分离状态时,或者初始间隙很大以至于接触面始终处于分离状态时,在频域中利用牛顿-拉夫逊法进行迭代求解的过程中,采用固定步长的频率自然延拓方式从小到大或从大到小来进行扫频计算即可,即上一次迭代收敛后,频率增加一定的步长,进行下一个频率点的计算,且可以以上一次的迭代收敛解作为迭代初始值.

而当存在分离状态和接触状态之间相互转换的情况时,其频域上的稳态响应曲线会表现出“歪头”的现象,这是非线性系统动力学特性的典型体现. 图 12 给出了不同初始正压力对系统响应的影响关系(如果初始正压力为负值表示接触面之间存在初始间隙). 在“歪头”区域对应每一个频率,系统的解不唯一,存在不稳定的解,这给数值计算带来很大困难. 此时可以采用弧长延拓技术^[82-83]. 弧长延拓法分为预估和校正两步,首先通过预估预测解的位置,然后检验预估的解是否为方程的解,如果不是则进行一次或多次校正,直至获得方程的解.

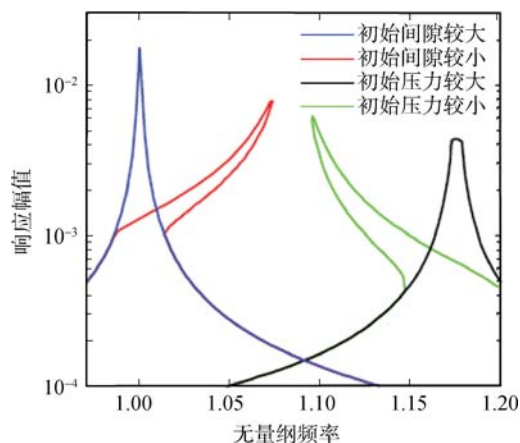


图12 不同初始正压力下的频域响应曲线

Fig. 12 Response curves of frequency domain with variable normal contact load

4 发展趋势及面临的挑战

对航空发动机中的干摩擦阻尼系统进行深入研究对于航空发动机的安全性和可靠性具有重要的意义. 近年来人们对于干摩擦阻尼系统的机理已经有了较深刻的理解, 在干摩擦阻尼系统的响应计算方法以及阻尼器结构参数优化设计等方面都取得了重要的有价值的成果, 解决了很多工程实际问题. 然而由于干摩擦阻尼系统研究的复杂性和重要性, 该领域内仍有许多问题值得深入研究.

4.1 高保真有限元模型减缩算法

尽管现在的计算机软硬件水平有了很大的提高, 但是在对具有几十万甚至上百万单元数的高保真有限元模型进行分析计算的过程中, 由于干摩擦阻尼系统的强非线性, 其迭代计算量依然是十分惊人的, 很多时候是难以接受的(如在研究具有干摩擦阻尼的失谐叶盘系统时, 由于不再有周期对称的特性, 在计算过程中必须对整个结构进行分析). 在对干摩擦阻尼系统进行分析的过程中, 更关注的是接触面的特性, 因此对整个非线性系统进行减缩计算是十分必要的. 在模型规模较大的线性系统的分析中常用的模态减缩方法、子结构模态综合法等方法不能简单、直接地用于强非线性系统, 需要发展更加高效, 更具适应性的减缩方法.

4.2 具有干摩擦阻尼的失谐叶盘振动问题

加工误差、材料的分散性、使用磨损不均匀等因素使各叶盘扇区间会有小量的差别, 这种小量的差别称为失谐. 已有的研究和实践证明, 失谐叶

盘结构存在局部振动响应放大的问题, 在设计中应予以考虑. 显然叶盘结构不同扇区的干摩擦阻尼器及其在使用过程中磨损程度的差异使失谐问题的分析变得更为复杂. 让研究人员感兴趣的是干摩擦阻尼器的引入是使失谐响应放大问题得到了抑制还是恶化了问题. 目前一些学者已经对考虑干摩擦阻尼的失谐叶盘振动问题进行一定的研究, 但是在这方面还有待深入.

4.3 干摩擦与气弹稳定性问题

气弹稳定性是航空发动机结构稳定性设计的重要组成部分. 在已经展开的研究中, 鲜有考虑系统干摩擦阻尼对气弹稳定性的影响. 在系统中设计干摩擦阻尼是否能大幅提高叶片的颤振边界, 以及如何设计需要深入研究. 同时考虑叶片的颤振以及干摩擦阻尼能够得到许多与线性叶盘结构不同的结论. 近年来, 对于谐调/失谐叶盘结构的气弹稳定性研究已经展开了大量的研究, 并且已经取得了很多的成就, 但是对于非线性叶盘结构, 考虑气弹稳定性的研究还远远不够.

4.4 干摩擦问题相关实验

在过去的一段时间, 研究人员在理论分析等方面取得了很大的进展, 但是关于干摩擦阻尼器的相关实验研究开展得还不够. 特别是在干摩擦问题的分析过程中, 一些重要的参数(如接触面刚度等)目前还需要通过实验来获得, 例如通过实验来获得接触面形状、接触面温度、相对运动速度等因素对接触刚度的影响是研究人员需要面对的难题, 因此干摩擦问题的相关实验研究在实际的工程应用中将是一个长期的任务.

4.5 新型干摩擦阻尼的设计研究

随着航空发动机性能要求的提高, 以及结构可靠性一体化设计思想的发展, 航空发动机的结构变得越来越简化, 类似于整体叶盘结构这样的设计思想已经大量应用于航空发动机中, 这造成了结构的接触面越来越少, 结构阻尼的水平进一步降低. 虽然很多研究人员在对气动阻尼、颗粒阻尼、气膜阻尼、材料阻尼等新型的阻尼形式进行研究, 但是这些研究距离应用还有一段距离, 而且一般都是针对单个叶片展开的, 难以应用于整体叶盘. 因此在现有的干摩擦阻尼器形式的基础上, 开发更新的形式, 适用于新型航空发动机结构特点的新型阻尼器成为了研究人员的一个关注的热点.

5 结束语

无论是干摩擦阻尼器还是其他类型的阻尼器,都不是万能的,都存在着一定的缺陷或者适用范围.因此,研究人员可结合不同类型阻尼器各自的优势,设计复合型干摩擦阻尼器.特别是随着智能材料科学与技术的发展,设计作用效果更好、作用范围更广、更加适应航空发动机结构振动环境的可控或可调阻尼的阻尼器是必然的发展趋势.

参考文献:

- [1] Hartog J P D. Forced vibration with combined Coulomb and viscous friction[J]. Transactions of the ASME, 1931, 53(9):107-115.
- [2] Griffin J H. A review of friction damping of turbine blade vibration[J]. International Journal of Turbo & Jet Engines, 1989, 7(3/4):297-308.
- [3] 单颖春,郝燕平,朱梓根,等.干摩擦阻尼块在叶片减振方面的应用与发展[J].航空动力学报,2001,16(3):218-223.
SHAN Yingchun,HAO Yanping,ZHU Zigen,et al. Application and development of platform friction damper for depressing resonant vibration of blades[J]. Journal of Aerospace Power, 2001, 16(3):218-223. (in Chinese)
- [4] 白鸿柏,黄协清.干摩擦振动系统响应计算方法研究综述[J].力学进展,2001,31(4):527-534.
BAI Hongbai,HUANG Xieqing. An overview on study of methods of response computation for dry frictionally damped vibration systems[J]. Journal of Advances in Mechanics, 2001, 31(4):527-534. (in Chinese)
- [5] Castanier M P, Pierre C. Modeling and analysis of mistuned bladed disk vibration: status and emerging directions[J]. Journal of Propulsion and Power, 2006, 22(2):384-396.
- [6] 陈光,洪杰,马艳红.航空燃气涡轮发动机结构[M].北京:北京航空航天大学出版社,2010.
- [7] 陈光.航空发动机结构设计与分析[M].北京:北京航空航天大学出版社,2006.
- [8] Menq C H, Griffin J H, Bielak J. The forced response of shrouded fan stages[J]. Journal of Vibration, Acoustics, Stress, and Reliability in Design, 1986, 108(1):50-55.
- [9] SHI Yajie, HONG Jie, SHAN Yingchun, et al. Forced response analysis of shrouded blades by an alternating frequency/time domain method[R]. ASME Paper GT2006-90595, 2006.
- [10] HONG Jie, SHI Yajie, ZHANG Dayi. Experimental study of damping characteristic of shrouded blade[R]. ASME Paper GT2007-27610, 2007.
- [11] 史亚杰.叶片非线性振动响应分析及干摩擦减振设计研究[D].北京:北京航空航天大学,2006.
SHI Yajie. Analysis of nonlinear response and design of vibration damping of shrouded blades system[D]. Beijing: Beijing University of Aeronautics and Astronautics, 2006. (in Chinese)
- [12] 洪杰,史亚杰,刘书国,等.带凸肩叶片非旋转状态减振特性实验研究[J].北京航空航天大学学报,2006,32(10):1174-1179.
HONG Jie, SHI Yajie, LIU Shuguo, et al. Experiment of damping characteristic of non-rotating shrouded blade[J]. Journal of Beijing University of Aeronautics and Astronautics, 2006, 32(10):1174-1179. (in Chinese)
- [13] Petrov E P, Ewins D J. Analytical formulation of friction interface elements for analysis of nonlinear multi-harmonic vibrations of bladed disks[J]. Journal of Turbomachinery, 2003, 125(2):364-371.
- [14] Petrov E P. A method for use of cyclic symmetry properties in analysis of nonlinear multiharmonic vibrations of bladed disks[J]. Journal of Turbomachinery, 2004, 126(1):175-183.
- [15] Petrov E P, Ewins D J. Method for analysis of nonlinear multiharmonic vibrations of mistuned bladed disks with scatter of contact interface characteristics[R]. Journal of Turbomachinery, 2005, 127(1):128-136.
- [16] Petrov E P, Ewins D J. Effects of damping and varying contact area at blade-disk joints in forced response analysis of bladed disk assemblies[J]. Journal of Turbomachinery, 2006, 128(2):403-410.
- [17] Petrov E P. A high-accuracy model reduction for analysis of nonlinear vibrations in structures with contact interfaces[J]. Journal of Engineering for Gas Turbines and Power, 2011, 133(10):1-10.
- [18] Allara M, Zucca S, Gola M M. Effect of crowning of dovetail joints on turbine blade root damping[J]. Key Engineering Materials, 2007, 347(1):317-322.
- [19] 陈璐璐.风扇结构阻尼动力学设计理论与方法研究[D].北京:北京航空航天大学,2012.
CHEN Lulu. Dynamic design theory and method of fan dampers[D]. Beijing: Beijing University of Aeronautics and Astronautics, 2012. (in Chinese)
- [20] HONG Jie, CHEN Lulu, MA Yanhong, et al. Design methods of friction damping at blade-disk joints[R]. ASME Paper GT2009-59510, 2009.
- [21] HONG Jie, CHEN Lulu, MA Yanhong, et al. Dynamic characteristics of dry friction damping at bladed disk joints: experiments [R]. ASME Paper GT2011-45965, 2011.
- [22] Georgiades F, Peeters M, Kerschen G, et al. Nonlinear modal analysis and energy localization in a bladed disk assembly[R]. ASME Paper GT2008-51388, 2008.

- [23] Gu W, Xu Z, Wang S. Advanced modelling of frictional contact in three-dimensional motion when analysing the forced response of a shrouded blade[J]. *Journal of Power and Energy*, 2010, 224(4): 573-582.
- [24] Yang B D, Menq C H. Characterization of contact kinematics and application to the design of wedge dampers in turbomachinery blading: Part I stick-slip contact kinematics [R]. ASME Paper 97-GT-19, 1997.
- [25] Yang B D, Menq C H. Characterization of contact kinematics and application to the design of wedge dampers in turbomachinery blading: Part II prediction of forced response and experimental verification[R]. ASME Paper 97-GT-20, 1997.
- [26] Sanliturk K Y, Ewins D J, Stanbridge A B. Under platform dampers for turbine blades: theoretical modelling, analysis and comparison with experimental data[R]. ASME Paper 99-GT-335, 1999.
- [27] Csaba G. Forced response analysis in time and frequency domains of a tuned bladed disk with friction dampers[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 1998, 214(3): 395-412.
- [28] Panning L, Sextro W, Popp K. Spatial dynamics of tuned and mistuned bladed disks with cylindrical and wedge-shaped friction dampers[J]. *International Journal of Rotating Machinery*, 2003, 9(3): 219-228.
- [29] Panning L, Popp K, Sextro W, et al. Asymmetrical under-platform dampers in gas turbine bladings; theory and application[R]. ASME Paper GT2004-53316, 2004.
- [30] Laxalde D, Thouverez F. Qualitative analysis of forced response of blisks with friction ring dampers[J]. *European Journal of Mechanics: A Solids*, 2007, 26(4): 676-687.
- [31] Laxalde D, Thouverez F. Vibration control for intergrally bladed disks using friction ring dampers[R]. ASME Paper GT2007-27087, 2007.
- [32] Laxalde D, Thouverez F. Non-linear vibrations of multi-stage bladed disks systems with friction ring dampers[C] // *Proceedings of the ASME 2007 International Design Engineering Technical Conference & Computers and Information in Engineering Conference*. Las Vegas, Nevada, USA: ASME, 2007: 3-10.
- [33] 胡晓煜. 世界中小型航空发动机手册[M]. 北京: 航空工业出版社, 2006: 214-220.
- [34] 黄宏亮, 李贵林, 欧代松. 航空锥齿轮减振阻尼环设计与分析[J]. *航空发动机*, 2013, 39(2): 25-30.
HUANG Hongliang, LI Gulin, OU Daisong. Design and analysis on vibration damper ring of aeroengine bevel gears [J]. *Aeroengine*, 2013, 39(2): 25-30. (in Chinese)
- [35] 曾亮, 李琳. 具有接触结合面的封严组件振动特性分析[J]. *航空动力学报*, 2006, 21(5): 854-861.
ZENG Liang, LI Lin. Vibration performance of contact system of labyrinth assembly [J]. *Journal of Aerospace Power*, 2006, 21(5): 854-861. (in Chinese)
- [36] 曾亮, 李琳. 用于篦齿封严装置的减振阻尼环设计理论[J]. *北京航空航天大学学报*, 2007, 33(5): 518-523.
ZENG Liang, LI Lin. Design of damping ring for vibration control in labyrinth air seals [J]. *Journal of Beijing University of Aeronautics and Astronautics*, 2007, 33(5): 518-523. (in Chinese)
- [37] 曾亮, 郭雪莲, 李琳. 带有阻尼环(套)的篦齿封严装置固有特性的理论与实验研究[J]. *航空动力学报*, 2007, 22(7): 1035-1043.
ZENG Liang, GUO Xuelian, LI Lin. Theoretic and experimental modal analysis of labyrinth air seals with damping ring/sleeves [J]. *Journal of Aerospace Power*, 2007, 22(7): 1035-1043. (in Chinese)
- [38] ZENG Liang, LI Lin. The dynamic friction performance of damping-rings in labyrinth air seal for vibration control[C] // *Proceeding of ASME Turbo Expo 2009*. Orlando, Florida, USA: ASME, 2009: 1-12.
- [39] Goodman L E, Klumpp J H. Analysis of slip damping with reference to turbine blade vibration[J]. *Journal of Applied Mechanics*, 1956, 23(2): 421-429.
- [40] Griffin J H. Friction damping of resonant stresses in gas turbine engine airfoils[J]. *Journal of Engineering for Power*, 1980, 102(2): 329-333.
- [41] Sinha A, Griffin J H. Effects of friction dampers on aerodynamically unstable rotor stages [J]. *AIAA Journal*, 1984, 23(2): 262-270.
- [42] Iwan W D. On a class of models for the yielding behavior of continuous and composite system[J]. *Journal of Applied Mechanics*, 1967, 34(3): 612-617.
- [43] Menq C H, Bielak J, Griffin J H. The influence of microslip on vibratory response: Part I a new microslip model[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 1986, 107(2): 279-293.
- [44] Menq C H, Griffin J H, Bielak J. The Influence of microslip on vibratory response: Part II a comparison with experimental results[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 1986, 107(2): 295-307.
- [45] Sanliturk K Y, Ewins D J. Modelling two-dimensional friction contact and its application using harmonic balance method[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 1996, 193(2): 511-523.
- [46] 何尚文, 任兴民, 秦卫阳, 等. 基于微滑移模型的 B-G 型干摩擦缘板阻尼器减振特性研究[J]. *振动与冲击*, 2012, 31(1): 44-48.
HE Shangwen, REN Xingmin, QIN Weiyang, et al. Reduced vibration characteristics of a B-G platform damper based on a micro-slip model [J]. *Journal of Vibration and Shock*, 2012, 31(1): 44-48. (in Chinese)
- [47] 漆文凯, 高德平. 带摩擦阻尼装置系统振动响应分析方法研究[J]. *航空动力学报*, 2006, 21(6): 161-167.
QI Wenkai, GAO Deping. Study of vibration response analysis method for the dry friction damping systems [J]. *Jour-*

- nal of Aerospace Power, 2006, 21(6): 161-167. (in Chinese)
- [48] Firtone C M, Zucca S. Modelling friction contacts in structural dynamics and its application to turbine bladed disks [M] // Awrejcewicz J. Numerical Analysis: Theory and Application. Rijka, Croatia: InTech, 2011: 301-334.
- [49] Griffin J H, Sinha A. The interaction between mistuning and friction in the forced response of bladed disk assemblies[J]. Journal of Engineering for Gas Turbines and Power, 1985, 107(1): 205-211.
- [50] Yang B D, Menq C H. Modeling of friction contact and its application to the design of shroud contact[J]. Journal of Engineering for Gas Turbines and Power, 1997, 119(4): 958-963.
- [51] Menq C H, Griffin J H, Bielak J. The influence of a variable normal load on the forced vibration of a frictionally damped structure[J]. Journal of Engineering for Gas Turbines and Power, 1986, 108(2): 300-305.
- [52] Menq C H, Chedamparam P, Griffin J H. Friction damping of two-dimensional motion and its application in vibration control[J]. Journal of Sound and Vibration, 1991, 144(3): 427-447.
- [53] Griffin J H, Menq C H. Friction damping of circular motion and its implications to vibration control[J]. Journal of Vibration and Acoustics, 1991, 113(2): 225-229.
- [54] Menq C H, Yang B D. Non-linear spring resistance and friction damping of frictional constraint having two-dimensional motion[J]. Journal of Sound and Vibration, 1998, 217(1): 127-143.
- [55] Yang B D, Menq C H. Characterization of 3D contact kinematics and prediction of resonant response of structure-shaving 3D frictional constraint[J]. Journal of Sound and Vibration, 1998, 217(5): 909-925.
- [56] Chen J J, Yang B D, Menq C H. Periodic forced response of structures having three-dimensional frictional constraints [J]. Journal of Sound and Vibration, 2000, 229(4): 775-792.
- [57] Wang J H, Shieh W L. The influence of a variable friction coefficient on the dynamic behavior of a blade with a friction damper[J]. Journal of Sound and Vibration, 1991, 149(1): 137-145.
- [58] 李琳, 范雨, 戴光昊. 二自由度扭转干摩擦系统的频域响应计算方法[J]. 航空动力学报, 2013, 28(4): 851-857.
LI Lin, FAN Yu, DAI Guanghao. Frequency domain solution of 2-DOF torsional dry friction system[J]. Journal of Aerospace Power, 2013, 28(4): 851-857. (in Chinese)
- [59] 范雨, 戴光昊, 李琳. 多界面干摩擦系统的减振特性及设计方法研究[J]. 工程力学, 2014, 31(3): 237-246.
FAN Yu, DAI Guanghao, LI Lin. On design and damping characteristics of multi-interface dry friction damper[J]. Engineering Mechanics, 2014, 31(3): 237-246. (in Chinese)
- nese)
- [60] Sinha A, Griffin J H. Frictional damping of flutter in gas turbine engine airfoils[J]. Journal of Aircraft, 1983, 20(4): 372-376.
- [61] Sinha A, Griffin J H. Influence of friction dampers on torsional blade flutter[J]. Journal of Engineering for Gas Turbines and Power, 1986, 108(2): 313-318.
- [62] Muszynska A, Jones D I G. A parametric study of dynamic response of a discrete model of turbomachinery blade disk [J]. Journal of Vibration, Acoustics, Stress, and Reliability in Design, 1983, 105(4): 434-443.
- [63] Muszynska A, Jones D I G. Tuned bladed disk dynamics: some aspects of friction related mistuning[J]. Journal of Sound and Vibration, 1983, 86(1): 107-128.
- [64] Berthillier M, Dupont C, Mondal R, et al. Blades forced response analysis with friction dampers[J]. Journal of Vibration and Acoustics, 1998, 120(2): 468-474.
- [65] Pierre C, Dowell E H. A study of dynamic instability of plates by an extended incremental harmonic balance method[J]. Journal of Applied Mechanics, 1985, 52(3): 693-697.
- [66] Pierre C, Ferri A A, Dowell E H. Multi-harmonic analysis of dry friction damped systems using an incremental harmonic balance method[J]. Journal of Applied Mechanics, 1985, 52(4): 958-964.
- [67] Lau S L, Zhang W S. Nonlinear vibration of piecewise-linear systems by incremental harmonic balance method[J]. Journal of Applied Mechanics, 1992, 59(1): 153-160.
- [68] Wang J H, Chen W H. Investigation of the vibration of a blade with friction damper by HBM[J]. Journal of Engineering for Gas Turbines and Power, 1993, 115(2): 294-299.
- [69] Cameron T M, Griffin J H. An alternation frequency/time domain method for calculation the steady-state response on nonlinear dynamic system[J]. Journal of Applied Mechanics, 1989, 56(1): 149-154.
- [70] 李琳. 考虑库伦阻尼时叶盘系统振动响应的求解方法[J]. 航空动力学报, 1998, 13(4): 366-371.
LI Lin. A solution for dynamic response of shrouded bladed disc with coulomb damping[J]. Journal of Aerospace Power, 1998, 13(4): 366-371. (in Chinese)
- [71] 李琳. 带冠叶盘的二维子结构循环非线性力学模型及其响应特性[J]. 航空学报, 1999, 20(1): 58-61.
LIN Lin. Non-linear modal of cyclic 2 DOF substructure of shrouded blisk[J]. Acta Aeronautica et Astronautica Sinica, 1999, 20(1): 58-61. (in Chinese)
- [72] 刘雅琳, 上官博, 徐自立. 抗叠混时频域融合算法及在叶片响应分析中的应用[J]. 航空动力学报, 2012, 27(6): 1238-1242.
LIU Yalin, SHANGGUAN Bo, XU Zili. Anti-aliasing alternating frequency/time domain method and its application

- in response analysis of blade systems [J]. *Journal of Areospace Power*, 2012, 27(6): 1238-1242. (in Chinese)
- [73] Guillen J. Studies of the dynamics of dry-friction-damped blade assemblies [D]. Michigan: University of Michigan, 1999.
- [74] Poudou O. Modeling and analysis of the dynamics of dry-friction-damped structural systems [D]. Michigan: University of Michigan, 2007.
- [75] Poudou O, Pierre C. Hybrid frequency-time domain methods for the analysis of complex structural systems with dry friction damping [R]. AIAA-2003-1411, 2003.
- [76] Nacivet S, Pierre C, Thouverez F, et al. A dynamic Lagrangian frequency-time method for the vibration of dry-friction-damped systems [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2001, 265(1): 201-219.
- [77] Salles L, Blanc L, Thouverez F, et al. Dynamic analysis of a bladed disk with friction and fretting wear in blade attachments [R]. ASME Paper GT2009-60151, 2009.
- [78] Charleux D, Gibert C, Thouverez F, et al. Numerical and experimental study of friction damping in blade attachments of rotating bladed disks [J]. *International Journal of Rotating Machinery*, 2006(1): 1-13.
- [79] Siewert C, Panning L, Wallaschek J, et al. Multiharmonic forced response analysis of a turbine blading coupled by nonlinear contact forces [J]. *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, 2010, 132(2): 1-9.
- [80] Krack M, Herzog A, Panning S, et al. Multiharmonic analysis and design of shroud friction joints of bladed disks subject to microslip [C] // *Proceedings of the ASME International Design Engineering Technical Conferences & Computers and Information in Engineering Conference*. Chicago, USA: ASME, 2012: 1083-1092.
- [81] Herzog A, Krack M, Scheidt L P, et al. Comparison of two widely-used frequency-time contact models for the vibration simulation of shrouded turbine blades [R]. ASME Paper GT2014-26226, 2014.
- [82] Chan T F C, Keller H B. Arc-length continuation and multi-grid techniques for nonlinear elliptic eigenvalue problems [J]. *SIAM Journal of Scientific and Statistical Computing*, 1982, 3(2): 173-194.
- [83] Von Groll G, Ewins D J. The harmonic balance method with arc-length continuation in rotor/stator contact problems [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2001, 241(2): 223-233.

(编辑:陈越)